柴田・橋爪のLangevin方程式はStratonovich型かIto型か?(第5回『非平衡系の統計物理』シンポジウム)

今給黎, 隆; 斎藤, 健; 根本, 香絵; 有光, 敏彦

柴田・橋爪のLangevin方程式はStratonovich型かIto型か？

今給黎 隆, 斎藤 健, 根本 香絵*, 有光 敏彦
筑波大物理, * クィーンズランド大物理

1 はじめに

量子系における微視的なハミルトニアンで記述されるモデルからLangevin方程式を導出する試みは，古くから行われてきた．特に，射影演算子法によるLangevin方程式の導出は，森[1]により始められ，多くの研究者によって調べられてきた．

柴田・橋爪[2]は，熱浴と相互作用するスピン系に対して射影演算子法を適用することにより，スピン緩和に対する量子Langevin方程式を導出した．その際，注目する系の演算子に対するHeisenberg方程式から出発し，通常の解析関数に対する規則にしたがって計算を進めている．したがって，導出された量子Langevin方程式は，通常の計算規則にしたがうStratonovich型の確率微分方程式であると理解すべきであろう．

一方，散逸現象を正準形式の場の理論として取り扱うNon-Equilibrium Thermo Field Dynamics(NETFD)[3]-[7] の一貫した体系から見ると，柴田・橋爪のLangevin方程式はIto型の確率微分方程式と理解すべきという結論が得られる．これは先ほどの結果と矛盾しており，微視的に導出されたLangevin方程式に対して，その計算則をきちんと定める必要があるという問題が現れた．

本論文では，スピン緩和と減衰調和振動子の例を用いて，射影演算子法により導出された量子Langevin方程式の確率過程としての計算則がIto型である事を，保存量の微分を計算する事により具体的に示す[8]．次章では，NETFDにおけるLangevin方程式を導出する．NETFDの体系では，いくつかの公理からLangevin方程式の形が決定する．第3章では，柴田・橋爪の方法に沿ってLangevin方程式を導出する．第4章では，スピン緩和に対する柴田・橋爪のLangevin方程式に対して，その計算則がIto型になっている事を，保存量の微分を計算する事によって示す．また，減衰調和振動子のモデルに対しても，柴田・橋爪のLangevin方程式がIto型になっている事を示す．

2 NETFDにおけるLangevin方程式

柴田・橋爪のLangevin方程式と比較しうる，NETFDにおけるLangevin方程式を導出する．

乱雑力と相互作用する系を考える．NETFDでは，状態 $|0_f(t)\rangle$ は確率Liouville方程式,

$$d|0_f(t)\rangle = -i\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt\ |0_f(t)\rangle, \tag{1}$$

に従って時間発展する．(1) 式の積は，Ito型の積である．

無限小時間発展演算子であるハット・ハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt$ は,

$$\left(i\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt\right)^{\sim} = i\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt, \tag{2}$$

を満たす．ここで，ティルド共役~は，任意の演算子 A, A_1, A_2に対して,

$$(A_1A_2)^{\sim} = \tilde{A}_1\tilde{A}_2, \tag{3}$$

$$(c_1A_1 + c_2A_2)^{\sim} = c_1^*\tilde{A}_1 + c_2^*\tilde{A}_2, \tag{4}$$

$$(\tilde{A})^{\sim} = A, \tag{5}$$

$$(A^\dagger)^{\sim} = (\tilde{A})^\dagger, \tag{6}$$

で定義される．ただし，c_1, c_2 はc数である．

ハット・ハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt$ は，注目する系に関して確率の保存を表す式,

$$\langle 1|\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt = 0, \tag{7}$$

によって決定される．$\langle 1|$ は注目する系のブラ真空であり，注目する系の演算子 a に対し,

$$\langle 1|a^\dagger = \langle 1|\tilde{a}, \tag{8}$$

を満たす.

時間発展演算子 $\hat{V}_f(t)$ を,

$$|0_f(t)\rangle = \hat{V}_f(t)|0\rangle, \tag{9}$$

によって定義する.

Heisenberg演算子 $A(t)$ は，この演算子 $\hat{V}_f(t)$ を用いて,

$$A(t) = \hat{V}_f^{-1}(t)A\hat{V}_f(t), \tag{10}$$

と定義され，$A(t)$ に対するIto型のLangevin方程式は,

$$dA(t) = d\hat{V}_f^{-1}(t)\ A\ \hat{V}_f(t) + \hat{V}_f^{-1}(t)\ A\ d\hat{V}_f(t) + d\hat{V}_f^{-1}(t)\ A\ d\hat{V}_f(t), \tag{11}$$

となる.

2.1 減衰調和振動子

例として，減衰調和振動子に対するLangevin方程式を導出する．

乱雑力に，モーメント，

$$\langle dF_t\rangle = \left\langle dF_t^\dagger\right\rangle = 0, \qquad \langle dF_t dF_s\rangle = \left\langle dF_t^\dagger dF_s^\dagger\right\rangle = 0, \tag{12}$$

$$\left\langle dF_t^\dagger dF_s\right\rangle = 2\kappa\bar{n}\delta(t-s)dtds, \qquad \left\langle dF_t dF_s^\dagger\right\rangle = 2\kappa(\bar{n}+1)\delta(t-s)dtds, \tag{13}$$

を持つ定常Wiener過程を仮定する．ここで，

$$\bar{n} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\omega/T}-1}, \tag{14}$$

であり，$\langle\cdots\rangle = \langle|\cdots|\rangle$ は，乱雑力の演算子 dF_t, $dF_t^\dagger$に関する乱雑平均を意味する．乱雑力の演算子は，

$$\langle| dF_t^\dagger = \langle| d\tilde{F}_t, \tag{15}$$

を満たす．

ハット・ハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt$ のモデルとして，

- a, $a^\dagger$, dF_t, $dF_t^\dagger$ 及びそのティルド共役に関して高々2次．
- 大局的位相変換 $a \to a\mathrm{e}^{i\theta}$, $dF_t \to dF_t\mathrm{e}^{i\theta}$ の下で不変．

を採用する．

このモデルに対するIto型のハット・ハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt$ は，

$$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt = \hat{H}_S dt + i\left(\hat{\Pi}_R + \hat{\Pi}_D\right)dt + d\hat{M}_t, \tag{16}$$

$$\hat{H}_S = \omega(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}), \tag{17}$$

$$\hat{\Pi}_R = -\kappa\left[(a^\dagger - \tilde{a})(\mu a + \nu\tilde{a}^\dagger) + \text{t.c.}\right], \quad \hat{\Pi}_D = 2\kappa(\bar{n}+\nu)(a^\dagger - \tilde{a})(\tilde{a}^\dagger - a), \tag{18}$$

$$d\hat{M}_t = i\left[(a^\dagger - \tilde{a})dW_t + \text{t.c.}\right], \tag{19}$$

となる．ここで，μ 及び ν は $\mu+\nu=1$ を満たす任意の実数であり，dW_tは，

$$dW_t = \mu dF_t + \nu d\tilde{F}_t^\dagger, \tag{20}$$

で定義される．t.c. はその前の項のティルド共役を意味する．

柴田・橋爪のLangevin方程式と比較しうる量として，オブザーバブル$A(t)$にブラ真空$\langle\!\langle 1|$を作用させたブラ・ベクトル$\langle\!\langle 1|A(t)$を導入する．ブラ・ベクトル$\langle\!\langle 1|A(t)$に対するIto型のLangevin方程式は，

$$\begin{aligned} d\langle\!\langle 1|A(t) = i\langle\!\langle 1|[H_S(t),\ A(t)]dt + \kappa\left\{\langle\!\langle 1|[a^\dagger(t),\ A(t)]a(t) + \langle\!\langle 1|a^\dagger(t)[A(t),\ a(t)]\right\}dt \\ +2\kappa\bar{n}\langle\!\langle 1|[a(t),\ [A(t),\ a^\dagger(t)]]dt \\ +\langle\!\langle 1|[A(t),\ a^\dagger(t)]dF_t + \langle\!\langle 1|[a(t),\ A(t)]dF_t^\dagger, \end{aligned} \tag{21}$$

となる．

2.2 スピン緩和

柴田と橋爪がLangevin方程式を導出するのに用いたスピン緩和のモデルに対して，NETFDのLangevin方程式を導出する．

乱雑力は，モーメント，

$$\langle dF_t^-\rangle = \langle dF_t^+\rangle = 0, \quad \langle dF_t^z\rangle = 0, \quad \langle dF_t^- dF_{t'}^-\rangle = \langle dF_{t'}^+ dF_t^+\rangle = 0, \tag{22}$$

$$\langle dF_t^+ dF_{t'}^-\rangle = \gamma_{01}\delta(t-t')dtdt', \quad \langle dF_t^- dF_{t'}^+\rangle = \gamma_{10}\delta(t-t')dtdt', \tag{23}$$

$$\langle dF_t^z dF_{t'}^z\rangle = \langle dF_{t'}^z dF_t^z\rangle = \zeta\delta(t-t')dtdt', \tag{24}$$

を持つ定常Wiener過程を仮定する．Wiener過程の演算子は，

$$\langle| dF_t^+ = \langle| d\tilde{F}_t^-, \qquad \langle| dF_t^z = \langle| d\tilde{F}_t^z, \tag{25}$$

を満たす．

ハット・ハミルトニアン$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt$に対して，

- $s^\pm$, s^z, $dF_t^\pm$, dF_t^z 及びそのティルダ共役に関して2次まで．
- 大局的位相変換 $s^- \to s^- \mathrm{e}^{i\theta}$, $dF_t^- \to dF_t^- \mathrm{e}^{i\theta}$ の下で不変．

の要請を仮す．但し，$s^\pm$ は $s^\pm = s^x \pm is^y$ で定義される．

この要請の下で得られるIto型のハット・ハミルトニアン$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt$は，

$$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt = \hat{H}_S dt + i\left(\hat{\Pi}_R + \hat{\Pi}_D\right)dt + d\hat{M}_t, \tag{26}$$

$$\hat{H}_S = \omega(s^z - \tilde{s}^z) + \Delta_1((s^z)^2 - (\tilde{s}^z)^2) + \Delta_2(s^+s^- - \tilde{s}^+\tilde{s}^-), \tag{27}$$

$$\hat{\Pi}_R = \frac{1}{2}(\gamma_{01} - \gamma_{10})\left\{(s^+ - \tilde{s}^-)(\mu s^- + \nu\tilde{s}^+) + \text{t.c.}\right\}, \tag{28}$$

$$\hat{\Pi}_D = \frac{1}{2}(\mu\gamma_{01} + \nu\gamma_{10})\left\{(s^+ - \tilde{s}^-)(\tilde{s}^+ - s^-) + \text{t.c.}\right\} - \frac{1}{2}\zeta(s^z - \tilde{s}^z)^2, \tag{29}$$

及び，

$$d\hat{M}_t = \left[(s^+ - \tilde{s}^-)dW_t - \text{t.c.}\right] + (s^z - \tilde{s}^z)d\Omega_t^z, \tag{30}$$

となる．ただし，

$$dW_t = \mu dF_t^- + \nu d\tilde{F}_t^+, \quad d\Omega_t^z = \frac{dF_t^z + d\tilde{F}_t^z}{2}, \tag{31}$$

で定義される演算子を導入した．μ 及び ν は $\mu + \nu = 1$ を満たす任意の実数である．

ブラ・ベクトル $\langle\!\langle 1|s^x(t)$, $\langle\!\langle 1|s^y(t)$ 及び $\langle\!\langle 1|s^z(t)$ に対する Ito 型の Langevin 方程式は，

$$\begin{aligned} d\langle\!\langle 1|s^x(t) = &-(\omega + \Delta_2)\langle\!\langle 1|s^y(t)dt - (\Delta_1 - \Delta_2)\langle\!\langle 1|[s^y(t),\ s^z(t)]_+ dt \\ &-\frac{1}{2}(\gamma_{01} + \gamma_{10} + \zeta)\langle\!\langle 1|s^x(t)dt - \frac{1}{2}(\gamma_{01} - \gamma_{10})\langle\!\langle 1|[s^z(t),\ s^x(t)]_+ dt \\ &+\langle\!\langle 1|dF_t^y s^z(t) - \langle\!\langle 1|dF_t^z s^y(t), \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} d\langle\!\langle 1|s^y(t) = &(\omega + \Delta_2)\langle\!\langle 1|s^x(t)dt + (\Delta_1 - \Delta_2)\langle\!\langle 1|[s^z(t),\ s^x(t)]_+ dt \\ &-\frac{1}{2}(\gamma_{01} + \gamma_{10} + \zeta)\langle\!\langle 1|s^y(t)dt - \frac{1}{2}(\gamma_{01} - \gamma_{10})\langle\!\langle 1|[s^y(t),\ s^z(t)]_+ dt \\ &+\langle\!\langle 1|dF_t^z s^x(t) - \langle\!\langle 1|dF_t^x s^z(t), \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} d\langle\!\langle 1|s^z(t) = &-(\gamma_{01} + \gamma_{10})\langle\!\langle 1|s^z(t)dt + (\gamma_{01} - \gamma_{10})\langle\!\langle 1|\left\{[s^x(t)]^2 + [s^y(t)]^2\right\}dt \\ &+\langle\!\langle 1|dF_t^x s^y(t) - \langle\!\langle 1|dF_t^y s^x(t), \end{aligned} \tag{34}$$

となる．ここで，表記 $[A, B]_+ = AB + BA$ を導入した．

3 柴田・橋爪の Langevin 方程式

柴田・橋爪の手法 [2] にそって，彼らの導出した Langevin 方程式を導く．

相互作用する 2 つの量子系を考える．ハミルトニアンは，

$$H = H_0 + H_1 = H_S + H_R + H_1, \tag{35}$$

で与えられる．H_S を注目する系のハミルトニアン，H_R を熱浴のハミルトニアン，H_1 を相互作用ハミルトニアンと呼ぶ．

注目する系の演算子 $A(t)$ の Heisenberg 運動方程式は，

$$\frac{d}{dt}A(t) = i[H(t), A(t)] = iL(t)A(t), \tag{36}$$

である.

摂動展開を行うので，相互作用表示,

$$A^I(t) = e^{iL_0 t}A, \tag{37}$$

を導入する．相互作用表示の演算子を用いれば，Heisenberg演算子は,

$$A(t) = U^{-1}(t,0)A^I(t), \tag{38}$$

のように書かれる．ここで時間発展演算子 $U^{-1}(t,0)$ は,

$$\frac{d}{dt}U(t,0) = -iL_1^I(t)U(t,0), \tag{39}$$

$$U(0,0) = 1, \tag{40}$$

を満たし，相互作用表示の相互作用Liouville演算子 $L_1^I(t)$ は,

$$L_1^I(t) = e^{iL_0 t}L_1 e^{-iL_0 t}, \tag{41}$$

で定義される.

射影演算子 $P^2 = P,\ P + Q = 1$ を用いて，$U^{-1}(t,0)$ の満たす微分方程式を,

$$\frac{d}{dt}U^{-1}(t,0) = U^{-1}(t,0)(P+Q)iL_1^I(t), \tag{42}$$

と変形する.

$U^{-1}(t,0)Q$ を,

$$U^{-1}(t,0)Q \equiv C(t)U_{QQ}^{-1}(t,0), \tag{43}$$

$$\frac{d}{dt}U_{QQ}(t,0) = -iL_{1,QQ}^I(t)U_{QQ}(t,0), \tag{44}$$

$$L_{1,QQ}^I(t) = QL_1^I(t)Q, \tag{45}$$

と置き，$L_{1,QQ}^I(t)$ で時間発展する項とそれ以外として求める.

$C(t)$ の微分方程式は,

$$\frac{d}{dt}U^{-1}(t,0)Q = U^{-1}(t,0)iL_1^I(t)Q \tag{46}$$

$$\equiv U^{-1}(t,0)iQL_1^I(t)Q + \dot{C}(t)U_{QQ}^{-1}(t,0), \tag{47}$$

より,

$$\dot{C}(t) = iU^{-1}(t,0)PL_1^I(t)QU_{QQ}(t,0), \tag{48}$$

となる．この式を解くと，

$$C(t) = Q - i\int_0^t dsU^{-1}(s,0)PL_1^I(s)QU_{QQ}(s,0), \tag{49}$$

が得られる．この$C(t)$を用いれば，$U^{-1}(t,0)Q$は，

$$U^{-1}(t,0)Q \;=\; QU_{QQ}^{-1}(t,0) + i\int_0^t dsU^{-1}(s,0)PL_{1,PQ}^I(s)U_{QQ}^{-1}(t,s), \tag{50}$$

となる．この式を(42)式に代入し，さらに(38)式を用いれば，運動方程式は，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A(t) \;=\;& U^{-1}(t,0)i(L_0 + PL_1^I(t))A^I(t)\\ &-U^{-1}(t,0)\int_0^t dsU^{-1}(0,s)PL_{1,PQ}^I(s)U_{QQ}^{-1}(s,0)L_1^I(t)A^I(t)\\ &+QU_{QQ}^{-1}(t,0)iL_1^I(t)A^I(t),\end{aligned} \tag{51}$$

となる．

(51)式のままでは，元のHeisenbergの運動方程式のままである．柴田・橋爪はLangevin方程式を得る為に2つの処方を行った．

柴田・橋爪の処方 1:

- 全ての項に対して最低次だけを残す．

この処方を用いると，Heisenbergの運動方程式は，

$$\frac{d}{dt}A(t) \;=\; iL_S(t)A(t) - U^{-1}(t,0)\int_0^t ds\langle L_1^I(s)L_1^I(t)\rangle A^I(t) + \underline{\underline{iL_1^I(t)A^I(t)}}, \tag{52}$$

となる．ここで，$P=\langle\cdots\rangle$を熱浴の系に関する熱平衡を与える演算子に選び，相互作用ハミルトニアンの熱浴の平衡状態での期待値を0と置いた．

柴田・橋爪の処方 2:

(52)式の$\underline{\underline{\cdots}}$の項は相互作用表示から，Heisenberg表示へ表示の変換を行う演算子$U^{-1}(t,0)$が存在しないので相互作用表示の演算子で書かれている．そこで，

- $\underline{\underline{\cdots}}$の項の中の，注目する系に関する演算子をHeisenberg表示に置き換える．

操作を行う．

この2つの処方の末に得られる方程式が，柴田・橋爪のLangevin方程式である．

3.1 スピン緩和

スピン緩和のモデルに対する柴田・橋爪のLangevin方程式を導出する．微視的なハミルトニアンとして，

$$H_S = \omega s^z, \quad H_1 = g(s^x R^x + s^y R^y + s^z R^z), \tag{53}$$

を用いる．熱浴の自由なハミルトニアンは特には指定しない．

このモデルに対して，柴田・橋爪の1つめの処方を行った後のスピン系の演算子$A(t)$に対するHeisenbergの運動方程式は，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A(t) &= iL_0(t)A(t) \\
&\quad +\phi^{+-}[S^-(t), A(t)]S^+(t) + \phi^{-+}[S^+(t), A(t)]S^-(t) + \phi^{zz}[S^z(t), A(t)]S^z(t) \\
&\quad -\phi^{+-*}S^-(t)[S^+(t), A(t)] - \phi^{-+*}S^+(t)[S^-(t), A(t)] - \phi^{zz*}S^z(t)[S^z(t), A(t)] \\
&\quad +iL_1^I(t)A^I(t),
\end{aligned} \tag{54}$$

となる．但し，

$$\phi^{+-} = \frac{g^2}{4}\int_0^\infty dse^{-i\omega s}\langle R^{+^I}(s)R^{-^I}(0)\rangle, \quad \phi^{-+} = \frac{g^2}{4}\int_0^\infty dse^{-i\omega s}\langle R^{-^I}(s)R^{+^I}(0)\rangle, \tag{55}$$

$$\phi^{zz} = g^2\int_0^\infty ds\langle R^{z^I}(s)R^{z^I}(0)\rangle. \tag{56}$$

であり，演算子を確率変数として扱う為に長時間極限を行った．

柴田・橋爪の2つ目の処方を行えば，

$$\begin{aligned}
iL_1^I(t)A^I(t)dt &= i[S^{j^I}(t), A^I(t)]gR^{j^I}(t)dt \\
&\to i[S^j(t), A(t)]dF_t^i,
\end{aligned} \tag{57}$$

となる．最後の項の置き換えの時に，熱浴の変数は長時間極限でWiener過程に確率収束する事を用いた．

スピン演算子に対するLangevin方程式は，

$$\begin{aligned}
ds^x(t) &= -(\omega + \Delta_2)s^y(t)dt - (\Delta_1 - \Delta_2)[s^y(t),\ s^z(t)]_+dt \\
&\quad -\frac{1}{2}(\gamma_{01} + \gamma_{10} + \zeta)s^x(t)dt - \frac{1}{2}(\gamma_{01} - \gamma_{10})[s^z(t),\ s^x(t)]_+dt \\
&\quad +dF_t^y s^z(t) - dF_t^z s^y(t),
\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
ds^y(t) &= (\omega + \Delta_2)s^x(t)dt + (\Delta_1 - \Delta_2)[s^z(t),\ s^x(t)]_+dt \\
&\quad -\frac{1}{2}(\gamma_{01} + \gamma_{10} + \zeta)s^y(t)dt - \frac{1}{2}(\gamma_{01} - \gamma_{10})[s^y(t),\ s^z(t)]_+dt \\
&\quad +dF_t^z s^x(t) - dF_t^x s^z(t),
\end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned} ds^z(t) = & -(\gamma_{01}+\gamma_{10})s^z(t)dt + (\gamma_{01}-\gamma_{10})\left\{[s^x(t)]^2+[s^y(t)]^2\right\}dt \\ & +dF_t^x s^y(t) - dF_t^y s^x(t), \end{aligned} \tag{60}$$

となる．ただし，

$$\Delta_2 = -\Im m\Phi, \quad \Delta_1 = \Im m\phi^{zz} - \Re e\Psi - \Im m\Phi, \quad \zeta = 2\Re e\phi^{zz}, \tag{61}$$

$$\gamma_{01} = \Re e\Phi - \Im m\Psi, \quad \gamma_{10} = \Re e\Phi + \Im m\Psi, \tag{62}$$

$$\Phi = \phi^{+-} + \phi^{-+*}, \quad \Psi = -i\{\phi^{+-} - \phi^{-+*}\}, \tag{63}$$

である．

4 柴田・橋爪のLangevin方程式はIto型かStratonovich型か？

先ほど導出されたスピン緩和のLangevin方程式を用いて，柴田・橋爪のLangevin方程式の計算則を探る．

(58)–(60)式は，NETFDのLangevin方程式(32)–(34)式からブラ真空を取り払った式と一致している．従って，その形より，柴田・橋爪のLangevin方程式はIto型Langevin方程式であると決論付けられる．

4.1 $[s^x(t),\ s^y(t)]$の交換関係

次に$[s^x(t),\ s^y(t)]$の交換関係の微分を計算することによって，柴田・橋爪のLangevin方程式の確率過程としての計算則を調べる．

(58)–(60)式をStratonovich型の微分方程式とみなして，$[s^x(t),\ s^y(t)]$の微分を計算すると，

$$\begin{aligned} d[s^x(t),\ s^y(t)] = & \ i\{-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)s^z(t) + (\gamma_{01}-\gamma_{10})\{[s^x(t)]^2+[s^y(t)]^2-2[s^z(t)]^2\}\}dt \\ & +[dF_t^y\circ s^z(t) - dF_t^z\circ s^y(t) \overset{\circ}{,}\ s^y(t)] + [s^x(t) \overset{\circ}{,}\ dF_t^z\circ s^x(t) - dF_t^x\circ s^z(t)] \\ = & \ i\{-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)s^z(t) + (\gamma_{01}-\gamma_{10})\{[s^x(t)]^2+[s^y(t)]^2-2[s^z(t)]^2\}\}dt \\ & +[dF_t^y\circ s^z(t) - dF_t^z\circ s^y(t),\ s^y(t)] + [s^x(t),\ dF_t^z\circ s^x(t) - dF_t^x\circ s^z(t)] \\ & +\frac{1}{2}[dF_t^y s^z(t) - dF_t^z s^y(t),\ ds^y(t)] + \frac{1}{2}[ds^x(t),\ dF_t^z s^x(t) - dF_t^x s^z(t)] \\ = & \ i\{-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)s^z(t) + (\gamma_{01}-\gamma_{10})\{[s^x(t)]^2+[s^y(t)]^2-2[s^z(t)]^2\}\}dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+[dF_t^y s^z(t)-dF_t^z s^y(t),\ s^y(t)]+[s^x(t),\ dF_t^z s^x(t)-dF_t^x s^z(t)]\\
&+[dF_t^y s^z(t)-dF_t^z s^y(t),\ dF_t^z s^x(t)-dF_t^x s^z(t)]\\
&+\frac{1}{2}[dF_t^y ds^z(t)-dF_t^z ds^y(t),\ s^y(t)]+\frac{1}{2}[s^x(t),\ dF_t^z ds^x(t)-dF_t^x ds^z(t)]\\
=\ & i\{-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)s^z(t)dt+(\gamma_{01}-\gamma_{10})\{[s^x(t)]^2+[s^y(t)]^2-2[s^z(t)]^2\}dt\\
&+dF_t^x s^y(t)-dF_t^y s^x(t)\}-i\zeta s^z(t)dt-i(\gamma_{01}+\gamma_{10})s^z(t)dt\\
=\ & i\{-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)s^z(t)dt+(\gamma_{01}-\gamma_{10})\{[s^x(t)]^2+[s^y(t)]^2-2[s^z(t)]^2\}dt\\
&+dF_t^x\circ s^y(t)-dF_t^y\circ s^x(t)\}\\
&-\frac{1}{2}(dF_t^x ds^y(t)-dF_t^y ds^x(t))-i\zeta s^z(t)dt-i(\gamma_{01}+\gamma_{10})s^z(t)dt\\
=\ & ids^z(t)-i\zeta s^z(t)dt,
\end{aligned}
\tag{64}
$$

となる．これは，交換関係，

$$
[s^x(t),\ s^y(t)]=is^z(t),
\tag{65}
$$

を微分した式とは一致しない．

(58)-(60) 式をIto型の確率微分方程式と解釈して，$d[s^x(t),\ s^y(t)]$ を計算すれば，

$$
\begin{aligned}
d[s^x(t),\ s^y(t)]=\ & i\{-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)s^z(t)+(\gamma_{01}-\gamma_{10})\{[s^x(t)]^2+[s^y(t)]^2-2[s^z(t)]^2\}\}dt\\
&+[dF_t^y s^z(t)-dF_t^z s^y(t),\ s^y(t)]+[s^x(t),\ dF_t^z s^x(t)-dF_t^x s^z(t)]\\
&+[dF_t^y s^z(t)-dF_t^z s^y(t),\ dF_t^z s^x(t)-dF_t^x s^z(t)]\\
=\ & ids^z(t),
\end{aligned}
\tag{66}
$$

となる．(66) 式は，交換関係を微分した式になっている．

従って，交換関係を調べた結果も，柴田・橋爪のLangevin方程式はIto型の確率微分方程式であるという結論に至った．

4.2 スピンの大きさ

スピンの大きさは保存する．$s^2(t)$ の微分をStratonovich型及びIto型のそれぞれの計算方法で計算し，その量が消えるかを確認する．

(58)-(60) 式をStratonovich型の微分方程式と解釈し，スピンの大きさを計算すれば，

$$
d[s^x(t)]^2=-(\omega+\Delta_2)[s^y(t),\ s^x(t)]_+dt-(\Delta_1-\Delta_2)[s^x(t),\ [s^y(t),\ s^z(t)]_+]_+dt
$$

$$
\begin{aligned}
&-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)[s^x(t)]^2dt-\frac{1}{2}(\gamma_{01}-\gamma_{10})[s^x(t),\ [s^z(t),\ s^x(t)]_+]_+dt\\
&+[dF_t^y\circ s^z(t)-dF_t^z\circ s^y(t)\ ;\ s^x(t)]_+\\
=&-(\omega+\Delta_2)[s^y(t),\ s^x(t)]_+dt-(\Delta_1-\Delta_2)[s^x(t),\ [s^y(t),\ s^z(t)]_+]_+dt\\
&-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)[s^x(t)]^2dt-\frac{1}{2}(\gamma_{01}-\gamma_{10})[s^x(t),\ [s^z(t),\ s^x(t)]_+]_+dt\\
&+[dF_t^y s^z(t)-dF_t^z s^y(t),\ s^x(t)]_++\frac{1}{2}[dF_t^y s^z(t)-dF_t^z s^y(t),\ ds^x(t)]_+\\
&+\frac{1}{2}[dF_t^y ds^z(t)-dF_t^z ds^y(t),\ s^x(t)]_+\\
=&-(\omega+\Delta_2)[s^y(t),\ s^x(t)]_+dt-(\Delta_1-\Delta_2)[s^x(t),\ [s^y(t),\ s^z(t)]_+]_+dt\\
&-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)[s^x(t)]^2dt-\frac{1}{2}(\gamma_{01}-\gamma_{10})[s^x(t),\ [s^z(t),\ s^x(t)]_+]_+dt\\
&+(\gamma_{01}+\gamma_{10})[s^z(t)]^2dt+\zeta[s^y(t)]^2dt\\
&+dF_t^y[s^x(t),\ s^z(t)]_+-dF_t^z[s^x(t),\ s^y(t)]_+\\
&-\frac{i}{2}(\gamma_{01}-\gamma_{10})[s^y(t),\ s^x(t)]_+dt-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)[s^x(t)]^2dt,
\end{aligned}\tag{67}
$$

$$
\begin{aligned}
d[s^y(t)]^2=&(\omega+\Delta_2)[s^x(t),\ s^y(t)]_+dt+(\Delta_1-\Delta_2)[s^y(t),\ [s^z(t),\ s^x(t)]_+]_+dt\\
&-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)[s^y(t)]^2dt-\frac{1}{2}(\gamma_{01}-\gamma_{10})[s^y(t),[s^y(t),\ s^z(t)]_+]_+dt\\
&+[dF_t^z\circ s^x(t)-dF_t^x\circ s^z(t)\ ;\ s^y(t)]_+\\
=&(\omega+\Delta_2)[s^x(t),\ s^y(t)]_+dt+(\Delta_1-\Delta_2)[s^y(t),\ [s^z(t),\ s^x(t)]_+]_+dt\\
&-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)[s^y(t)]^2dt-\frac{1}{2}(\gamma_{01}-\gamma_{10})[s^y(t),[s^y(t),\ s^z(t)]_+]_+dt\\
&+[dF_t^z s^x(t)-dF_t^x s^z(t),\ s^y(t)]_++\frac{1}{2}[dF_t^z s^x(t)-dF_t^x s^z(t),\ ds^y(t)]_+\\
&+\frac{1}{2}[dF_t^z ds^x(t)-dF_t^x ds^z(t),\ s^y(t)]_+\\
=&(\omega+\Delta_2)[s^x(t),\ s^y(t)]_+dt+(\Delta_1-\Delta_2)[s^y(t),\ [s^z(t),\ s^x(t)]_+]_+dt\\
&-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)[s^y(t)]^2dt-\frac{1}{2}(\gamma_{01}-\gamma_{10})[s^y(t),[s^y(t),\ s^z(t)]_+]_+dt\\
&+(\gamma_{01}+\gamma_{10})s^{z2}(t)dt+\zeta s^{x2}(t)dt\\
&+dF_t^z[s^x(t),\ s^y(t)]_+-dF_t^x[s^z(t),\ s^y(t)]_+\\
&-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)[s^y(t)]^2dt+\frac{i}{2}(\gamma_{01}-\gamma_{10})[s^x(t),\ s^y(t)]_+dt,
\end{aligned}\tag{68}
$$

$$
d[s^z(t)]^2=-2(\gamma_{01}+\gamma_{10})[s^z(t)]^2dt+(\gamma_{01}-\gamma_{10})[s^z(t),\ [s^x(t)]^2+[s^y(t)]^2]_+dt
$$

$$
\begin{aligned}
&+[dF_t^x \circ s^y(t) - dF_t^y \circ s^x(t) \,\overset{\circ}{;}\, s^z(t)]_+ \\
&= -2(\gamma_{01}+\gamma_{10})[s^z(t)]^2 dt + (\gamma_{01}-\gamma_{10})[s^z(t),\ [s^x(t)]^2+[s^y(t)]^2]_+ dt \\
&\quad +[dF_t^x s^y(t) - dF_t^y s^x(t),\ s^z(t)]_+ + \frac{1}{2}[dF_t^x s^y(t) - dF_t^y s^x(t),\ ds^z(t)]_+ \\
&\quad +\frac{1}{2}[dF_t^x ds^y(t) - dF_t^y ds^x(t),\ s^z(t)]_+ \\
&= -2(\gamma_{01}+\gamma_{10})[s^z(t)]^2 dt + (\gamma_{01}-\gamma_{10})[s^z(t),\ [s^x(t)]^2+[s^y(t)]^2]_+ dt \\
&\quad +(\gamma_{01}+\gamma_{10})([s^x(t)]^2+[s^y(t)]^2)dt - (\gamma_{01}-\gamma_{10})s^z(t)dt \\
&\quad +dF_t^x[s^y(t),\ s^z(t)]_+ - dF_t^y[s^x(t),\ s^z(t)]_+ \\
&\quad -2(\gamma_{01}+\gamma_{10})[s^z(t)]^2 dt,
\end{aligned} \tag{69}
$$

から,

$$
ds^2(t) = -(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)\{[s^x(t)]^2+[s^y(t)]^2\}dt - 2(\gamma_{01}+\gamma_{10})[s^z(t)]^2 dt \neq 0, \tag{70}
$$

となる. $\circ$ はStratonovich積を表す.

一方, (58)-(60)式をIto型の確率微分方程式と思いスピンの大きさの微分を用いれば,

$$
\begin{aligned}
d[s^x(t)]^2 = &-(\omega+\Delta_2)[s^y(t),\ s^x(t)]_+ dt - (\Delta_1-\Delta_2)[s^x(t),\ [s^y(t),\ s^z(t)]_+]_+ dt \\
&-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)[s^x(t)]^2 dt - \frac{1}{2}(\gamma_{01}-\gamma_{10})[s^x(t),\ [s^z(t),\ s^x(t)]_+]_+ dt \\
&+(\gamma_{01}+\gamma_{10})[s^z(t)]^2 dt + \zeta[s^y(t)]^2 dt \\
&+dF_t^y[s^x(t),\ s^z(t)]_+ - dF_t^z[s^x(t),\ s^y(t)]_+,
\end{aligned} \tag{71}
$$

$$
\begin{aligned}
d[s^y(t)]^2 = &(\omega+\Delta_2)[s^x(t),\ s^y(t)]_+ dt + (\Delta_1-\Delta_2)[s^y(t),\ [s^z(t),\ s^x(t)]_+]_+ dt \\
&-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)[s^y(t)]^2 dt - \frac{1}{2}(\gamma_{01}-\gamma_{10})[s^y(t), [s^y(t),\ s^z(t)]_+]_+ dt \\
&+(\gamma_{01}+\gamma_{10})[s^z(t)]^2 dt + \zeta[s^x(t)]^2 dt \\
&+dF_t^z[s^x(t),\ s^y(t)]_+ - dF_t^x[s^z(t),\ s^y(t)]_+,
\end{aligned} \tag{72}
$$

$$
\begin{aligned}
d[s^z(t)]^2 = &-2(\gamma_{01}+\gamma_{10})[s^z(t)]^2 dt + (\gamma_{01}-\gamma_{10})[s^z(t),\ [s^x(t)]^2+[s^y(t)]^2]_+ dt \\
&+(\gamma_{01}+\gamma_{10})([s^x(t)]^2+[s^y(t)]^2)dt - (\gamma_{01}-\gamma_{10})s^z(t)dt \\
&+dF_t^x[s^y(t),\ s^z(t)]_+ - dF_t^y[s^x(t),\ s^z(t)]_+,
\end{aligned} \tag{73}
$$

から,

$$ds^2(t) = d[s^x(t)]^2 + d[s^y(t)]^2 + d[s^z(t)]^2 = 0, \tag{74}$$

となる.

故に，スピンの大きさの微分を計算しても，柴田・橋爪のLangevin方程式はIto型の確率微分方程式と結論付ける事が出来る.

4.3 減衰調和振動子

さらに，減衰調和振動子のモデルに対して，柴田・橋爪のLangevin方程式の計算則を探る.

微視的なハミルトニアンとして，線型の相互作用するボゾン系,

$$H_S = \omega a^\dagger a, \quad H_R = \textstyle\sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k, \quad H_1 = g\textstyle\sum_k (a^\dagger b_k + \text{h.c.}),$$

を用いる.

注目する系の演算子$A(t)$に対する柴田・橋爪のLangevin方程式は,

$$\begin{aligned} dA(t) &= i[H_s(t),\ A(t)]dt \\ &\quad +\kappa\{a^\dagger(t)[A(t),\ a(t)] + [a^\dagger(t),\ A(t)]a(t)\}dt + 2\kappa\bar{n}[a^\dagger(t),\ [A(t),\ a(t)]]dt \\ &\quad +[A(t),\ a^\dagger(t)]dF_t + [a(t),\ A(t)]dF_t^\dagger, \end{aligned} \tag{75}$$

となる．但し,

$$\kappa = \pi g^2, \qquad dF_t = g\sum_k b_k^I(t)dt, \tag{76}$$

である.

Aに生成消滅演算子 $a^\dagger$, a 及び個数演算子$a^\dagger a$ を代入すると，Langevin方程式は,

$$da(t) = -i\omega a(t)dt - \kappa a(t)dt + dF_t, \tag{77}$$

$$da^\dagger(t) = i\omega a^\dagger(t)dt - \kappa a^\dagger(t)dt + dF_t^\dagger, \tag{78}$$

$$d[a^\dagger(t)a(t)] = -2\kappa[a^\dagger(t)a(t) - \bar{n}]dt + a^\dagger(t)dF_t + a(t)dF_t^\dagger, \tag{79}$$

となる.

(79)式は，(77)式及び(78)式から導かれなければならない．(77)，(78)式をStratonovich型の微分方程式と解釈して$a^\dagger(t)a(t)$の微分を計算すれば,

$$\begin{aligned} d[a^\dagger(t)a(t)] &= da^\dagger(t)\ a(t) + a^\dagger(t)da(t) \\ &= -2\kappa a^\dagger(t)a(t)dt + a^\dagger(t)dF_t + a(t)dF^\dagger, \end{aligned} \tag{80}$$

が得られる．これは(79)式とつじつまが合わない．一方，(77)，(78)式をIto型の微分方程式として$d[a^\dagger(t)a(t)]$を求めれば，

$$
\begin{aligned}
d[a^\dagger(t)a(t)] &= da^\dagger(t)\ a(t) + a^\dagger(t)da(t) + da^\dagger(t)da(t) \\
&= -2\kappa[a^\dagger(t)a(t) - \bar{n}]dt + a^\dagger(t)dF_t + a(t)dF^\dagger,
\end{aligned}
\tag{81}
$$

となる．この式は(79)式と同じ形をしている．従って，減衰調和振動子系に対しても，柴田・橋爪のLangevin方程式はIto型の微分方程式であることが確認された．

5　まとめ

この論文では，柴田・橋爪の導出したLangevin方程式に対して，スピン演算子の交換関係と，スピンの大きさの微分を計算する事により，その計算則がIto型である事を示した．また，減衰調和振動子の系に対しても，Ito型の確率微分方程式と理解しないと，つじつまが合わない事を証明した．

解析的な計算が成り立つHeisenbergの運動方程式が，解析的な計算の成り立たないIto型のLangevin方程式に確率過程として移行する理由はまだ分かっていない．また，柴田・橋爪の処方の2つ目として，相互作用表示の演算子をHeisenberg表示の演算子に手で置き換える操作を行ったが，そのような置き換えが正当化される理由も不明である．なぜ，柴田・橋爪のLangevin方程式がIto型に推移したかを調べる事は，今後の課題であり，量子確率過程の微視的な基礎付けのより深い理解への一歩になるであろう．

References

[1] H. Mori, Prog. Theor. Phys. **33** (1965) 423.

[2] F. Shibata and N. Hashitsume, J. Phys. Soc. Japan **44** (1978) 1435.

[3] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 429.

[4] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 32.

[5] T. Arimitsu, in *Thermal Field Theories*, eds. H. Ezawa, T. Arimitsu and Y. Hashimoto (North-Holland, 1991) 207.

[6] T. Arimitsu, Lecture Note of the *Summer School for Younger Physicists in Condensed Matter Physics* [published in "Bussei Kenkyu" (Kyoto) **60** (1993) 491-526, written in English], and the references therein.

[7] T. Arimitsu, Condensed Matter Physics (Lviv, Ukraine) **4** (1994) 26.

[8] T. Imagire, T. Saito, K. Nemoto and T. Arimitsu, Physica A (1997) submitted.